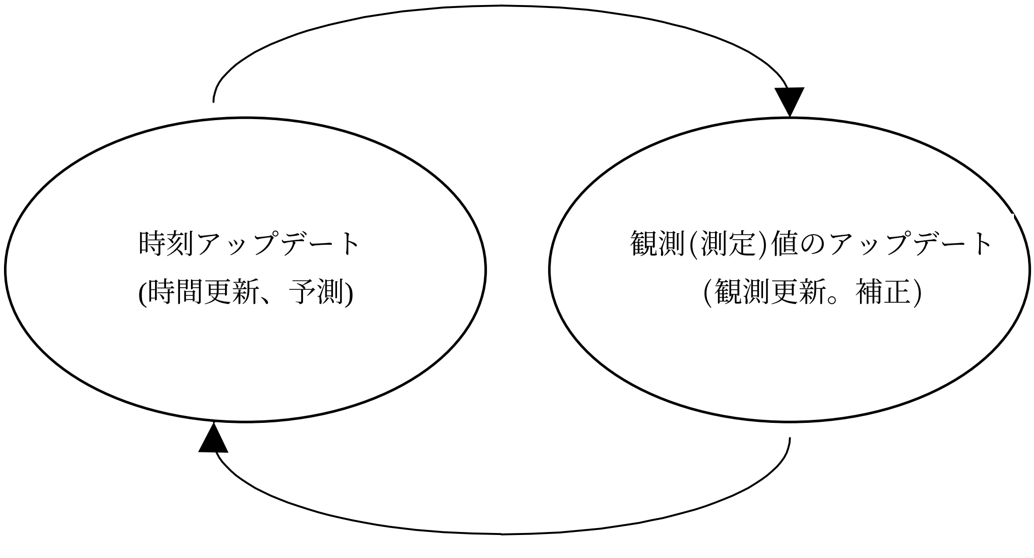
本資料は、システムの制御に関して全くの初心者が、カルマンフィルタの位置づけ、原理、計算法を理解するために必要と思われることがらを、これまた初心者である筆者が筆者なりにかみくだいて記述したものである(「***初心者の、初心者による、初心者のためのカルマンフィルタ***」)。したがって、制御の専門家からみるとまったくおかしな表現、単語の使用法の誤り、解釈の間違い等があることを恐れるところであるが、それにしても筆者が「カルマンフィルタ」という言葉に初めて接したときの困惑を、できるだけ他の初心者に味わわせずにすめば、との思いから、あえてこのような資料を作成したものである。この資料について意見、感想等があれば、是非筆者にお知らせいただき、多少なりとも役に立つものにしたいと考えている。

まずは【カルマンフィルタって何？】
超簡単に答えるとすれば、こんなところでしょうか。

> 直前までの情報と、たった今取得したデータをもとに、もっとも適切な(最適な)システムの状態を推定する手法。ただし、測定値にはノイズが乗っており、システムの状態を示す変数自体にもノイズが乗っているものとする。

この、ノイズが乗っている、というところが問題で、話がわかりにくくなる原因といえます。
カルマンフィルタを用いて最適な推定を行う、という構図を、概念図で示したのが以下のものです。この図は、参考文献(An Introduction to the Kalman Filter by Greg Welch and Gary Bishop)によるもので、本資料も実はこの文献をベースとして構成しています。是非原文を読んでみてください。原文では、拡張カルマンフィルタという、もう少し進んだ手法も解説しています。

<u>推定と補正</u>
制御システムがデジタル系である場合、システムの推定の概念は次のようにとらえることができる。時刻がステップ 1,2,,･･･,k-1,k,k+1,,･･･のように離散的に規定されているとして、タイムステップが進むたびに、システムは観測(測定)値を入手し、その前のステップで予測した値と比較して予測値を補正(更新)する。そしてその都度次のステップの状態の予測を行う。次のステップでは、新たな観測(測定)値を入手してその予測値を補正してゆく。この繰り返しによって、もっともらしい(より確からしい)予測(推定)ができると考えられる。



推定と予測、ろ波(ろは)、平滑(スムージング)(参考)

一般に、システムの状態を見積もる(estimate)ことを推定という。推定は、現在、過去、未来のいずれについてもできるわけであるが、未来、現在、過去に向けての推定を区別した場合、それぞれ予測、濾波(ろは)、平滑という。濾波という言葉は聞きなれないが、他の表現が見あたらないので仕方がない。

では、これらの言葉を数式で表現するとどうなるかというと、以下のように表現できる。すなわち、

(1)予測　　　現在($t=t_0$)までの情報に基づき、未来($t>t_0$)の状態を推定すること。

(2)ろ波　　　現在($t=t_0$)の情報に基づき、現在($t=t_0$)の状態を推定すること。

(3)平滑　　　現在($t=t_0$)までの情報に基づき、過去($t<t_0$)の状態を推定すること。

わかったような、わからないような説明であるが、要は以下のように考えればよいと思う。まず、予測自体は普段から使っている言葉でもあるし、問題ないと思われるが、ろ波とは何か、ということである。現在の情報に基づき現在を推定するとは何事か、と言われそうであるが、制御の世界では、システムの状態は必ずしも直接観測できるものではなく、観測可能なものと区別している場合が多い。例えば、ＥＳＡ、ＩＲＵによる姿勢レートは直接観測されるものであるが、システムの姿勢自体は観測量ではない。又ＥＳＡ、ＩＲＵのデータにはノイズが含まれ、システムとしてもどこかに(例えば積分器のノイズ等)ノイズ要素がある。そこで、ＥＳＡ、ＩＲＵの現在の観測データから現在の姿勢の推定を行うということが意味を持つことになる。又、過去の推定については、次のように考えれば違和感がなくなる。例えば、現在($t=t_0$)の観測値と１ステップ前($t=t_0-\triangle t$)、あるいはそれ以前の観測データをもとに、中間点($t_0-\triangle t<t<t_0$)での推定をする必要があるケースである。これは、測定データの中間値を求める場合にスムージングということをよく行うが、これと同じで、従ってこの推定を平滑(スムージング)と呼ぶわけである。

最適制御の目的

さて、ここからはもう少し式を用いて議論をします(表現もちょっと硬めに)。

　制御の初心者(筆者を含め)がカルマンフィルタの原理を理解するためには、カルマンフィルタを用いた最適制御の最終的な目的を理解することから始めるのがよいと考える。そこで、最適制御の目的を以下のように表現することとする。

***カルマンフィルタを用いた最適制御とは、システム、及び種々の測定値にランダムなノイズがのっているようなときに、各々のノイズの大きさに応じて適切な重み付けを行い、時々刻々変化するシステムの状態を精度よく推定することである。***

具体的には、

以下の線形方程式で規定される一次のディスクリート制御プロセスの状態変数 $\mathbf{x} \in R^{n}$ (要素数ｎ個のベクトル)の最も確からしい推定値を求める手法である。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_{k}\mathbf{x}_{k} + \mathbf{B}_{k}\mathbf{u}_{k} + \mathbf{w}_{k} \qquad (1)$$

$$\mathbf{M}\ \ddot{\mathbf{x}} + \delta_{0}\ddot{\mathbf{q}} = 0 \qquad (2)$$

ここで、$\mathbf{A}_{k}$ はｎｘｎの行列で、プロセスノイズがない場合のタイムステップｋにおけるシステムの状態とｋ＋１における状態を関連づけるものである。$\mathbf{B}_{k}$ はｎｘｌの行列で、制御入力 $\mathbf{u} \in R^{l}$ と状態変数 $\mathbf{x}$ とを関連づけるものである。

　式(2)は観測方程式と呼ばれ、$\mathbf{z} \in R^{m}$ は観測(測定)ベクトルを表す。Ｈはｍｘｎの行列で、システムの状態変数と観測(測定)値との関係を示すものである。

　又、(1)、(2)式において $\mathbf{w}_{k}$ 及び $\mathbf{v}_{k}$ はそれぞれプロセスのノイズ、観測(測定)のノイズであり、カルマンフィルタにおいては平均値０の正規分布型のホワイトノイズとする。すなわち、

$$\mathbf{p(w)} \sim \mathbf{N(0,Q)} \qquad (3)$$

$$\mathbf{p(v)} \sim \mathbf{N(0,R)} \qquad (4)$$

なお、ホワイトノイズの定義は、以下のとおりとする。

$$\mathbf{E}(\mathbf{w}_{m}\mathbf{w}_{l}^{T}) = \delta_{ml} \qquad (5)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{v}_{m}\mathbf{v}_{l}^{T}) = \delta_{ml} \qquad (6)$$

ここに、$\delta_{ij}$ はクロネッカーのデルタ(ｉ=j のとき１、他は０)である。

　この表現はやや複雑であるが、要するにシステムにノイズ $\mathbf{w}_{k}$ 、測定値にノイズ $\mathbf{v}_{k}$ がのっているとき、時々刻々のシステムの状態及び観測はそのノイズにより影響を受ける((1)、(2)式)わけである。そんなシステムがどうような挙動をするか、もっともらしい推定をせよ(状態変数 $\mathbf{x}$ を求めよ)、ということである。

それでは、もっともらしい推定(estimate)とは何か、ということになるが、例えば多くのデータをもとにカーブフィッティングを行う場合に最小２乗法を用いるのと同様、推定の誤差を最小とするような手法が望ましいということになる。

そろそろカルマンフィルタがややこしくなりかけるわけであるが、ややこしくなる原因は特に推定値とよばれる変数が入り交じるためであると思う。そこで、ここでいくつかの変数の定義を明確に頭に入れておく必要がある。特に重要なのは、状態の推定値として、どのような情報に基づいて推定を行うかによって、２種類の推定値が定義されることを理解することである。すなわち、

a priori state estimate $\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}$

：ステップｋ以前のプロセスの情報をもとにした推定値。ステップｋでの観測(測定)値はまだ与えられていない状態での推定。**事前推定**

a posteriori state estimate $\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}$

：ステップｋでの観測(測定)値 $\mathbf{z}_{\mathbf{k}}$ の情報をもとにした推定値。**事後推定**

の２つの推定値があることを念頭において以下を理解願いたい(２つの推定値の標記については、テキストによってさまざまであり、それもまた混乱を生ずる原因であると思われる。例えば、$\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}$ のことを $\hat{\mathbf{x}}^{-}_{\mathbf{k}}$ と書くものもあれば、$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{k}|\,\mathbf{k}-\mathbf{1})$ などと書くものもある)。

上に定義した２つの推定値に対して、それぞれ推定誤差及びその共分散((covariance)が以下のように定義される。

| | | |
|---|---|---|
| a priori estimate error | $\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}} \equiv \mathbf{x}_{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}$ | (7) |
| a posteriori estimate error | $\mathbf{e}_{\mathbf{k}} \equiv \mathbf{x}_{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}$ | (8) |
| a priori estimate error covariance | $\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}} = \mathbf{E}[\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{T}}]$ | (9) |
| a posteriori estimate error covariance | $\mathbf{P}_{\mathbf{k}} = \mathbf{E}[\mathbf{e}_{\mathbf{k}}\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{T}}]$ | (10) |

さて、観測値が得られたときの推定値である a posteriori state estimate(事後推定) $\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}$ と観測を実施前の推定値 a priori state estimate(事前推定) $\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}$ は、観測値がどの程度誤差を含んでいるかによるが、一般には互いに近似できると考えるのが当然と思われる。そこで、$\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}$ を $\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}$ を用いて以下のように表現する。

$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}} = \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}} + \mathbf{K}(\mathbf{z}_{\mathbf{k}} - \mathbf{H}_{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}) \qquad (11)$$

この式は、$\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{k}$ と $\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{k}$ の違いを $\mathbf{z}_\mathbf{k} - \mathbf{H}_\mathbf{k}\bar{\mathbf{x}}$、すなわち実際の観測値 $\mathbf{z}_\mathbf{k}$ と直前の推定値から予測される観測値 $\mathbf{H}_\mathbf{k}\bar{\mathbf{x}}$ のずれを用いて補正していることを示しているといえる。そしてその補正係数として $\mathbf{K}$ が登場する。$\mathbf{H}_\mathbf{k}\bar{\mathbf{x}}$ が直前の推定値から予測される観測値であるというのは、(2)式を用いて観測の予測を行った場合、右辺の $\mathbf{v}$ の項はホワイトノイズのため、平均処理を行うとゼロ、すなわち最も確からしい予測値はゼロであるため、消えてしまうことで理解できる。

この式についてもう少し理解を深めておこう。まず、観測に関する誤差が充分小さいとき((4)式の $\mathbf{R}$ が小さいとき)には、観測値が信用できることを意味するのであるから、(11)式で事前推定の項が消えるような $\mathbf{K}$ を採用して、観測値のみで推定するのがよいであろう。具体的には $\mathbf{K} = \mathbf{H}_\mathbf{k}^{-1}$ ととると、$\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{k}$ の寄与がなくなって、観測値 $\mathbf{z}_\mathbf{k}$ のみで推定できる($\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{k} = \mathbf{H}_\mathbf{k}^{-1}\mathbf{z}_\mathbf{k}$。(2)式でノイズゼロの場合と一致する)。一方、観測誤差よりは事前推定自身の精度が高い場合((9)式の共分散が小さいことを示す)、$\mathbf{K} = 0$ として事後推定を行うのがよい(この場合 $\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{k} = \bar{\mathbf{x}}_\mathbf{k}$)と考えられる。このようにして、観測誤差、推定誤差の大きさに応じて係数 $\mathbf{K}$ の値を調整することによって最適の推定ができる。カルマンフィルタでは、この $\mathbf{K}$ のことをカルマンゲインと呼んでいる。実際の K の値は、やや面倒な計算((11)式を(10)式に代入し、共分散を算出し、$\mathbf{K}$ について微分した結果をゼロとする、つまり共分散を最小とする $\mathbf{K}$ を求める)を経て、以下で与えられる。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_\mathbf{k} &= \bar{\mathbf{P}}_\mathbf{k}\mathbf{H}_\mathbf{k}^\mathbf{T}(\mathbf{H}_\mathbf{k}\bar{\mathbf{P}}_\mathbf{k}\mathbf{H}_\mathbf{k}^\mathbf{T} + \mathbf{R}_\mathbf{k})^{-1} \\
&= \frac{\bar{\mathbf{P}}_\mathbf{k}\mathbf{H}_\mathbf{k}^\mathbf{T}}{\mathbf{H}_\mathbf{k}\bar{\mathbf{P}}_\mathbf{k}\mathbf{H}_\mathbf{k}^\mathbf{T} + \mathbf{R}_\mathbf{k}} \qquad (12)
\end{aligned}
$$

ここで、$\mathbf{R}_\mathbf{k}$ は観測誤差の共分散である。

この式を用いると、$\lim_{\mathbf{R}_\mathbf{k} \to \mathbf{0}} \mathbf{K}_\mathbf{k} = \mathbf{H}_\mathbf{k}^{-1}$ であるから、観測に関する誤差が充分小さいときの上の議論と一致することがわかる。また、$\lim_{\bar{\mathbf{P}}_\mathbf{k} \to 0} \mathbf{K}_\mathbf{k} = 0$ であるから、事前推定自身の精度が高い場合の議論とも一致することがわかる。

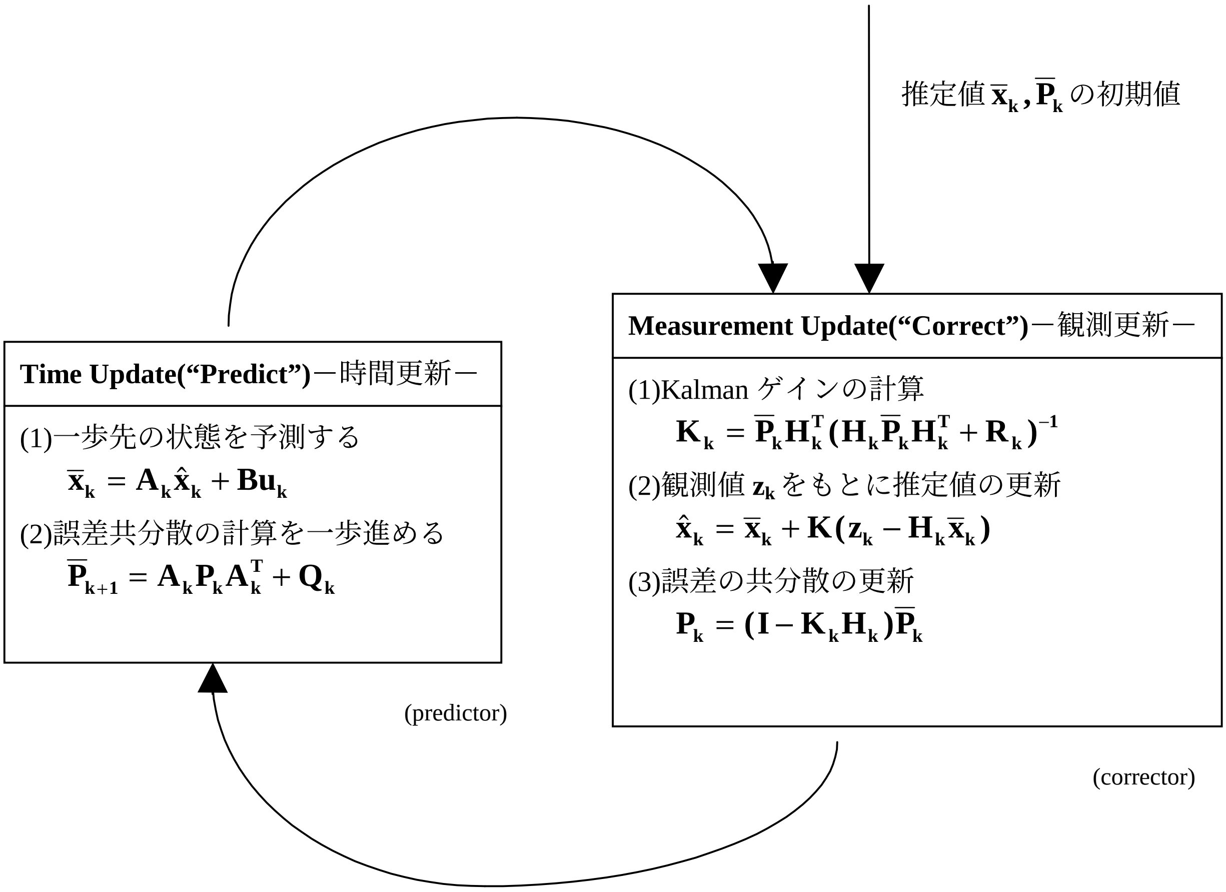
ここで、いよいよカルマンフィルタの最終的にゴールは次のように定義される。

すなわち、

> カルマンフィルタとは、各ステップ毎のシステムのプロセス情報及び観測(測定)値を用いて a posteriori error covariance $\mathbf{P}_\mathbf{k}$ を最小にするような推定を行う手法である。

a posteriori error covariance $\mathbf{P}_k$ を最小にする、即ち、例えばステップｋにおいて、最新の(ステップｋでの)観測(測定)値を用いてシステムの状態変数を推定する際に、その推定誤差を最小にするのが目的であることをよく頭に入れていただきたい。

これまでの結果を総合して、推定のステップを図示したのが下図である。




上の時刻更新ー観測更新のアルゴリズム(predictor-corrector algorithm)を具体的に言葉で表してみると、以下のようになる。

全体のフローとしては、推定値 $\bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\mathbf{P}}_k$ の初期値を与えてやり、Kalman ゲインを算出する。次に実際の観測を行って $\mathbf{z}_k$ を求め、推定値を更新する。同時に誤差の共分散も更新して、これらの値をもとに次の時刻の推定をを行う。この繰り返し(recursive)の計算になる。

実際には、誤差共分散行列 $\mathbf{P}_k$ 及びプロセスノイズ $\mathbf{Q}_k$ が、フィルタ計算の前に知られている必要がある。$\mathbf{P}_k$ については、観測の誤差であるから、オフラインでのサンプル測定で求めることができるが、$\mathbf{Q}_k$ についてはやや難がある。

なお、ここでは観測ノイズ、プロセスノイズは時間に依存しないものとして仮定してきたが、実際にには必ずしもそうではないため更に問題は複雑となる。これらの話題については本資料の範囲を越え

ているので、省略する。